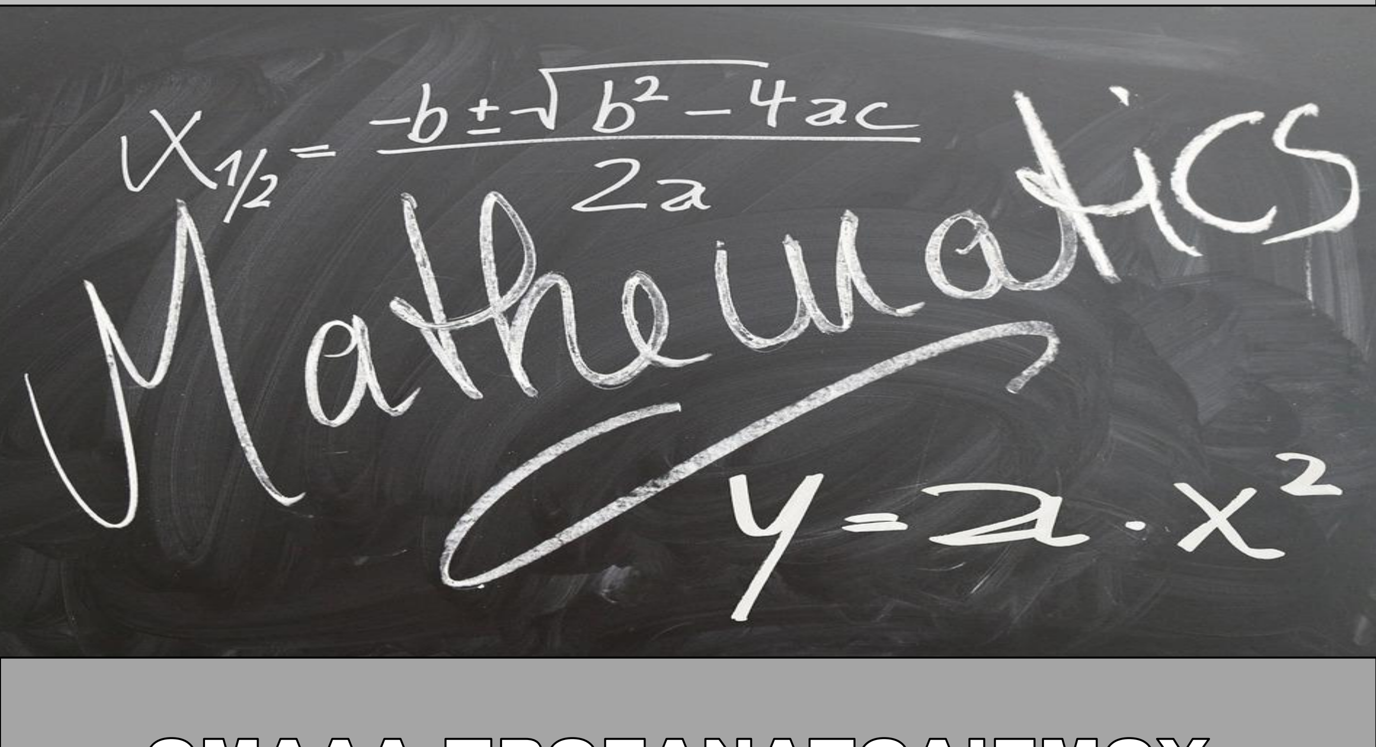
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

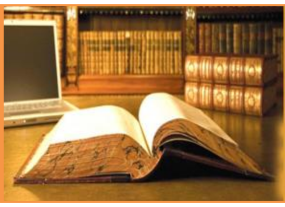
-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Επαναληπτική άσκηση στην συνέχεια και στα θεωρήματα συνέχειας



Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

-Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

-Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$.

-$g(0) = 0$ και $\lim_{\chi \to -\infty} g(x) = 0$.

α) Αν το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f είναι το διάστημα στο οποίο η $g(x) > 0$ τότε να βρείτε το $f(\mathbb{R})$.

β) Έστω η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $h \circ f$.

Αν $(h \circ f)(x) - (h \circ f)(x + 1) = y$ τότε:

γ) Αν η $h \circ f$ είναι συνεχής στο $\chi1 = 2019$ και $(h \circ f)(2020) = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι η $h \circ f$ είναι συνεχής στο $\chi2 = 2020$.

δ) Αν τελικά η $h \circ f$ συνεχής και $(h \circ f)(1) = (h \circ f)(3)$ τότε να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa1, \kappa2 \in [1,3]$ τέτοια ώστε:

$$|\kappa1 - \kappa2| = 1 \quad \text{και} \quad (h \circ f)(\kappa1) = (h \circ f)(\kappa2).$$

ε) Αν $y = 0$ τότε να δείξετε ότι η $h \circ f$ είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$ και $g(0)=0$ άρα για $x>0 \Leftrightarrow g(x)>g(0)=0$ και για $-1\le x\le 0 \Rightarrow g(x)\le g(0)=0$.

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ άρα αφού η g είναι συνεχής ισχύει ότι:

$g\big((-\infty,-1]\big)=\left[g(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=[g(-1),0)$ και επειδή για $-1\le x\le 0 \Rightarrow g(x)\le 0$ το $g(-1)<0$ άρα για $\chi\le -1$ η $g(x)<0$.

Άρα η $\mathbf{g(x)>0}$ για $\mathbf{x>0}$. **Άρα $\mathbf{f(\mathbb{R})=(0,+\infty)}$.**

β) $\boldsymbol{D_{h\circ f}=\left\{x\in D_f \middle| f(x)\in D_h\right\}=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in\mathbb{R}\}=x\in\mathbb{R}}$

γ) Αφού η $h\circ f$ είναι συνεχής στο χ1=2019 τότε: $\lim\limits_{x\to 2019}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(2019)$

Για να είναι συνεχής στο χ2=2020 πρέπει: $\lim\limits_{x\to 2020}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(2020)=\lambda$

$(h\circ f)(x)-(h\circ f)(x+1)=y \Leftrightarrow (h\circ f)(x)=(h\circ f)(x+1)+y$ (1)

Στην (1) για $x=2019$: $(h\circ f)(2019)=(h\circ f)(2020)+y$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2019}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(2019)=(h\circ f)(2020)+y=\lambda+y$

ΘΕΤΩ $x=h+1$ όταν $x\to 2020$ το $h\to 2019$

$$.\lim_{x\to 2020}(h\circ f)(x)=\lim_{h\to 2019}(h\circ f)(h+1)=\lim_{h\to 2019}((h\circ f)(h)-y)=$$

$$=(h\circ f)(2019)-y=(h\circ f)(2020)=\lambda.$$

Άρα η $h\circ f$ είναι συνεχής στο χ2=2020.

δ) Θεωρώ την συνάρτηση: $k(x)=(h\circ f)(x)-(h\circ f)(x+1)\,,x\in\mathbb{R}$

Η k είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών.

$k(1)=(h\circ f)(1)-(h\circ f)(2)$ και $k(2)=(h\circ f)(2)-(h\circ f)(3)=(h\circ f)(2)-(h\circ f)(3)=-k(1)$

Αν $\underline{(\mathbf{h\circ f})(\mathbf{1}) \neq (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{2})}$: Τότε $k(1)k(2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $xo \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $k(xo) = 0 \Leftrightarrow (h\circ f)(xo) = (h\circ f)(xo + 1)$ και αν $xo \in (1,2)$ τότε $yo = xo + 1$

Άρα υπάρχουν $\mathbf{xo, yo} \in (\mathbf{1,2}) \subseteq (\mathbf{1,3})$: $(\mathbf{h\circ f})(\mathbf{xo}) = (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{yo})$ και $|\mathbf{xo - yo}| = |\mathbf{1}| = \mathbf{1}$.

Αν $\underline{(\mathbf{h\circ f})(\mathbf{1}) = (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{2})}$: $K(1) = k(2) = 0$. Άρα $(h\circ f)(2) = (h\circ f)(3)$ και $(h\circ f)(1) = (h\circ f)(2)$

Για $\chi o = 1$ και $yo = 2$: $(h\circ f)(xo) = (h\circ f)(yo)$ και $|xo - yo| = |-1| = 1$

Για $\chi o = 2$ και $yo = 3$: $(h\circ f)(xo) = (h\circ f)(yo)$ και $|xo - yo| = |-1| = 1$

Άρα τελικά υπάρχουν $\mathbf{\kappa1, \kappa2} \in [\mathbf{1,3}]$ τέτοια ώστε: $|\mathbf{\kappa1 - \kappa2}| = \mathbf{1}$ και $(\mathbf{h\circ f})(\mathbf{\kappa1}) = (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{\kappa2})$.

ε) $(h\circ f)(x) - (h\circ f)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (h\circ f)(x) = (h\circ f)(x+1)$ (1)

Στην (1) για $x = x - 1$: $(h\circ f)(x-1) = (h\circ f)(x)$

Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ τα $\mathbf{x+1, x-1} \in \mathbb{R}$ και $(\mathbf{h\circ f})(\mathbf{x}) = (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{x+1}) = (\mathbf{h\circ f})(\mathbf{x-1})$

Άρα η $\mathbf{h\circ f}$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathbf{T = 1}$.